



**Pauta Control 2**  
**Miércoles 11 de Mayo de 2005**

**Pregunta 1**

- 1) (1,5 pts) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, dé una cota para el mayor número de vértices que puede tener el poliedro factible. Justifique su respuesta. Asuma que la matriz de restricciones A tiene dimensión  $n \times m$  y su rango es  $m$ .**

**R.** Si la matriz A es de  $n \times m$  con  $m < n$  y  $\text{rango}(A)=m$ , la cota superior para el número de vértices es el número  $\binom{n}{m}$ .

La explicación de esto es que los vértices del poliedro factible están relacionados en forma biunívoca con las soluciones factibles básicas y por cada elección diferente de  $m$  columnas de la matriz A puedo obtener una vértice o solución factible básica (es cota y no número exacto porque puede pasar que las  $m$  columnas elegidas no sean l.i., o que lo sean pero la solución básica que me queda no sea factible).

**(0,5 por dar la cota y 1 punto por la explicación).**

- 2) (1,5 pts) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, defina el problema que se resuelve para la Fase I del SIMPLEX. Explique por qué en este problema auxiliar se puede obtener una solución inicial factible en forma sencilla.**

**R.** El problema de Fase I tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} Ax + It &= b \\ x, t &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde  $t \in \mathbb{R}^m$ ,  $t$  variables artificiales.

Para recuperar el problema original, se debe forzar a todas las variables artificiales a tomar valor 0. ( $Ax = b$ ,  $Ax + It = b$  con  $t = 0$ ).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & w = \sum t_i \\ & Ax + It = b \\ & b, x, t \geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica factible inicial para (P1) es  $x = 0$  y  $t = b$ ,  $B = I$ . Lo sencillo acá es que en este caso la identidad sirve como solución factible básica inicial.

**(0,5 por escribir bien Fase I y 1 punto por explicar que la identidad sirve como solución factible básica inicial).**

- 3) (1,5 pts) ¿Es SIMPLEX un algoritmo polinomial? ¿Es el problema de Programación Lineal un problema polinomial? Justifique sus respuestas.**

**R.** No, el SIMPLEX no es necesariamente polinomial. Se pueden construir ejemplos donde el algoritmo recorre un número exponencial de vértices. Programación Lineal si es polinomial. En 1979 se presentó el algoritmo de las elipsoides, que resuelva cualquier caso en forma polinomial.

**(0,75 por cada respuesta).**

**4) (1,5 ptos) Dé una explicación sobre el significado económico del óptimo dual. Justifique la respuesta.**

**R.** Las variables duales en el óptimo representan el valor unitario en \$ del recurso  $i$ . También se puede decir que es la disponibilidad a pagar por alguna unidad de recurso  $i$ . Justificar que el beneficio óptimo con el recurso  $i$  modificado en  $t_i$  unidades ( $t_i$  menor que un cierto  $\xi$ ) es igual a:

$$z^* + \sum t_i y_i^*$$

Donde,  $z^*$  el óptimo del problema original e  $y_i^*$  óptimo dual del problema original.

**(0,5 puntos por decir que representan el valor unitario en \$ del recurso  $i$  y 1 punto por la justificación).**

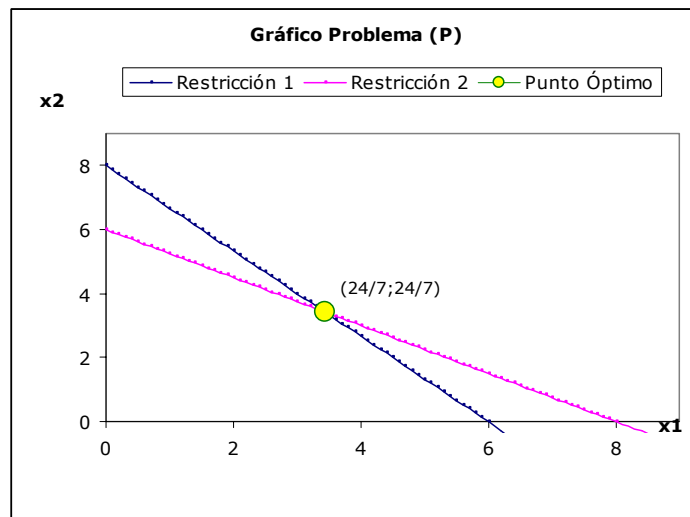
### Pregunta 2

**Dado el siguiente problema de programación lineal:**

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \max \quad x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & \quad \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & \quad \quad x_1 \geq 0 \\ & \quad \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

**a. (1,5 pto) Muestre gráficamente el problema indicando la solución óptima. Además escriba el problema (P) en la forma estándar.**

**R.**



Problema en forma Estándar

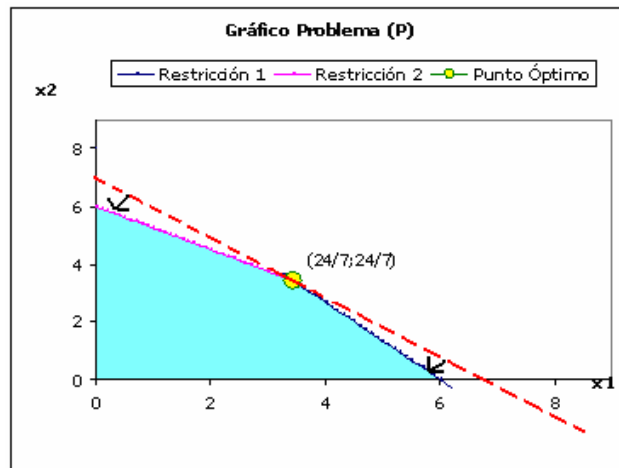
$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \quad -x_1 - x_2 \\ & \text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ & \quad \quad 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24 \\ & \quad \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Sabemos que la base óptima es la matriz<sup>1</sup>  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . En base a lo anterior responda.

**b. (1,5 pto) En qué rango se puede variar el coeficiente de la función objetivo  $c_1$  asociado a la variable  $x_1$  con tal que se mantenga la solución óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.**

**R.** Veremos dos formas de resolución.

### GRAFICAMENTE



Lo que debemos analizar es que para que no cambie la solución óptima debemos hacer que la pendiente de la función objetivo deba estar contenida entre las pendientes de la restricción (1) y (2).

#### Calculo de las pendientes

Restricción 1:  $4x_1 + 3x_2 = 24 \rightarrow x_2 = 8 - 4/3 x_1 \rightarrow M_{(1)} = -4/3$

Restricción 2:  $3x_1 + 4x_2 = 24 \rightarrow x_2 = 6 - 3/4 x_1 \rightarrow M_{(2)} = -3/4$

Por lo tanto la pendiente de la función objetivo :

$M_{(F, Obj)} = -c_1$  (Sobre el problema original)

Por lo tanto  $c_1 \in [3/4, 4/3]$

### SIMPLEX

Sabemos que la base asociada al óptimo es

---

<sup>1</sup> **HINT:**  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_{act} = B^{-1} R = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow b_{act} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/7 \\ 24/7 \end{pmatrix}$$

Necesitamos conocer el rango de  $c_1$  para que se mantenga la solución óptima. Podemos ver que para que no cambie la solución óptima lo único que debemos hacer es imponer que la base no cambie, es decir que no entre una variable más a la base. En base a esto lo que hacemos es analizar los costos reducidos de las variables NO Básicas, e imponemos que sigan siendo positivos:

$$C_R - red = C_R - C_B B^{-1} R \geq 0$$

$$C_R - red = (0,0) - (-c_1, -1) \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} = (4/7 c_1 - 3/7, -3/7 c_1 + 4/7) \geq 0$$

Por lo tanto:

$$4/7 c_1 - 3/7 \geq 0 \rightarrow c_1 \geq 3/4$$

$$-3/7 c_1 + 4/7 \geq 0 \rightarrow c_1 \leq 4/3$$

El rango en que puede variar  $c_1$  es  $[3/4, 4/3]$ .

**c. (1,5 pto) Determine la nueva solución óptima aplicando el algoritmo Simplex a partir de la solución óptima de (P) si  $c_1$  cambiase su valor de 1 a 0.**

**R.**

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \quad -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(P')} & \min \quad -x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Utilizamos los cálculos realizados en la parte anterior

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_{act} = B^{-1} R = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow b_{\text{act}} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/7 \\ 24/7 \end{pmatrix}$$

iteración n

i. **Analizamos la optimalidad.**

$$C_{R - \text{red}} = (0,0) - (0,-1) \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} = (-3/7, 4/7)$$

Por lo tanto, como sabemos el punto no es óptimo.

ii. **Criterio de Entrada**

$$\text{Min } \{ C_{R - \text{red}} / C_{R - \text{red}} \leq 0 \} = \text{Min } \{-3/7\} = -3/7 \rightarrow x_3 \text{ entra a la base.}$$

iii. **Criterio de Salida**

$$\text{Min } \{ b_{\text{act}} / a_{\text{act}, 3} ; \text{ con } a_{\text{act}, 3} \geq 0 \} = \text{Min } \{ (24/7) / (4/7) \} = 6 \rightarrow x_1 \text{ sale de la base}$$

Actualizamos las bases.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_{\text{act}} = B^{-1} R = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & -3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow b_{\text{act}} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Iteración n+1

i. **Analizamos la optimalidad.**

$$C_{R - \text{red}} = (0,0) - (0,-1) \begin{pmatrix} 7/4 & -3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = (3/4, 1/4) \rightarrow \text{La solución es óptima!!!}$$

La solución óptima es :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

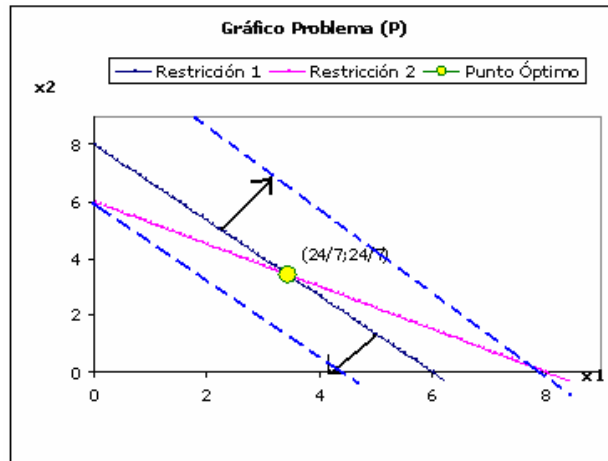
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Puesto que son Variables No Básicas}$$

d. (1,5 pts) En qué rango puede variar el coeficiente del lado derecho  $b_1$  asociado a la primera restricción con tal que se mantenga la base óptima de (P)? Aplique los conceptos vistos en clase.

**R.** Veremos dos formas de resolución.

Para responder esto debemos percatarnos que el cambio de parámetros no es sobre los costos. Por lo tanto es fácil ver que la optimalidad no está siendo variada. Sin embargo nos piden que analicemos cambios de  $b_1$  para que se mantenga la base óptima, sin embargo hay que tener presente que si cambia  $b_1$  los valores de  $(x_1, x_2)$  también cambian.

### GRAFICAMENTE



Para analizar esto gráficamente debemos mover la restricción (1) (con cambios en  $b_1$ ) desde el extremo  $(0, 6)$  a  $(8, 0)$ , puesto que en esos espacios la base sigue siendo representada por  $[x_1, x_2]$ .

#### Extremo $(0, 6)$

Necesitamos una función paralela que pase por el  $(0, 6)$ , es decir que tenga pendiente igual a (1),  $M_{(1)} = -4/3$ . La función es la siguiente:

$$4x_1 + 3x_2 = 18$$

#### Extremo $(8, 0)$

Necesitamos una función paralela que pase por el  $(8, 0)$ , es decir que tenga pendiente igual a (1),  $M_{(1)} = -3/4$ . La función es la siguiente:

$$4x_1 + 3x_2 = 32$$

Por lo tanto el rango es:  $b_1 \in [18, 32]$ .

### SIMPLEX

La base es:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La cual está definida por las variables básicas (en esa iteración)  $(x_1, x_2)$ . Por lo tanto la idea es ver como  $b_1$  afecta en la base. Por lo tanto, como la optimalidad no se afecta debemos analizar solamente la factibilidad del problema.

Por lo tanto analizamos que :

$$b_{act} = B^{-1} b \geq 0$$

$$b_{act} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} (b_1, 24) = (4/7 b_1 - 72/7, -3/7 b_1 + 96/7) \geq 0$$

Por lo tanto:

$$4/7 b_1 - 72/7 \geq 0 \rightarrow b_1 \geq 18$$

$$-3/7 b_1 + 96/7 \geq 0 \rightarrow b_1 \leq 32$$

El rango en que puede variar  $b_1$  es  $[18, 32]$ .

### **Pregunta 3**

JP, afamado estudiante de una de las grandes universidades de nuestro país ha egresado y encontrado trabajo en una empresa de retail llamada Dosilever, que tiene un producto estrella llamado "B&M".

El proyecto en el que quedo asignado JP consiste en la planificación de un calendario de promociones sobre un horizonte de 12 meses. La planificación consiste en determinar que promoción poner en una determinada semana<sup>2</sup> para el horizonte en cuestión.

Para el desarrollo de esto, su fiel secretaria le entrega la siguiente información.

- i. P el conjunto de promociones que se desarrolla en la empresa.
- ii. Estas promociones pueden ser implementadas para los 2 clientes que tiene la empresa en su cartera de negocio.
- iii. Cada cliente tiene a su vez distintos locales en los cuales puede ser promocionado el producto, para esto se conoce el conjunto  $S_c$  que define las salas de ventas que están siendo consideradas para cada cliente.

JP confiado de poder lograr este proyecto solicita a sus jefes información relevante para el desarrollo del calendario. A continuación se especifican sus requerimientos:

- i.  $B_{pcst}$  : Beneficio en pesos logrado si al cliente  $c$  le pongo una promoción de tipo  $p$  en la sala  $s$  en una semana  $t$ .
- ii.  $C_{pcst}$  : Costo en pesos asociado a poner la promoción de tipo  $p$  en el cliente  $c$  en la sala  $s$  en una semana  $t$ .
- iii.  $Ppto_{cm}$ : Presupuesto asignado por mes para cada cliente para realizar eventos promocionales.

Sus superiores al ver la confianza que tiene JP le solicitan que considere en su modelo los siguientes aspectos:

- i. Todas las promociones duran 1 semana, es decir no podemos poner más de una promoción por semana.

---

<sup>2</sup> Considere que cada uno de los meses consta de cuatro semanas.

- ii. Si decido realizar una promoción debo considerar que debemos contratar personal para implementarla (pej. Team Hombres y Mujeres). La contratación de personal tiene asociado un costo de  $CC_{cpt}$  pesos mensuales. Asimismo es necesario tener presente que puede existir un exceso de gente en la implementación de las promociones, con lo cuál se puede despedir gente a un costo  $CD_{cpt}$  pesos mensuales.
- iii. Un dato útil es considerar que para que una promoción de tipo  $p$  sea implementable se necesita tener un mínimo de personal de  $MP_{cp}$  personas a la semana.
- iv. Para nuestros clientes existe un número máximo de promociones que es posible realizar, las cuales no deben exceder de  $MaxPro_c$  a lo largo del período.
- v. Además de eso, es necesario tener en cuenta que nuestros clientes no desean tener las mismas promociones al mismo tiempo, por temas de competencia.
- vi. Junto con lo anterior, debemos considerar que para nuestros clientes existen un subconjunto de promociones las cuales son implementables, siendo  $P_{Imp_c}$  el conjunto de promociones que se pueden desarrollar en el cliente  $c$ .
- vii. Para coordinar la estrategia de nuestros clientes debemos considerar que si una promoción es implementada esta debe ser desarrollada a lo largo de todas las salas del cliente.
- viii. Es necesario desarrollar toda la planificación sujeto al presupuesto que se maneja en la empresa.
- ix. Un último aspecto es que debemos tener un equilibrio dentro de los tipos de promociones. En otras palabras, a lo largo del horizonte de promoción no podemos tener una diferencia mayor a 5 eventos promocionales entre los distintos tipos de promociones.

JP al ver estas consideraciones perdió la confianza que había adoptado. Inseguro de sí mismo le solicita a Ud. que le ayude a resolver este problema.

- a) Desarrolle un modelo de programación lineal entera mixta que permita maximizar las utilidades del calendario promocional.

**R.**

### **Variables**

$$x_{pcst} = \begin{cases} 1 & , \text{ Si pongo la promoción de tipo } p \text{ en el cliente } c \text{ en la sala } s \text{ en la semana } t \\ 0 & , \text{ Si no} \end{cases}$$

$NC_{cpt}$  : Número de personas a contratar para el cliente  $c$  para implementar la promoción  $p$  en la semana  $t$ .

$ND_{cpt}$  : Número de personas a despedir para el cliente  $c$  para implementar la promoción  $p$  en la semana  $t$ .

$NP_{cpt}$  : Número de personas mantenidas para el cliente  $c$  para implementar la promoción  $p$  en la semana  $t$ .



## Restricciones

### i. Una promoción por semana.

$$\sum_{p \in PIMP_c} x_{pcst} = 1 \quad \forall c, s, t$$

### ii. Contratación y Despido.

$$NP_{pct} + NC_{pct} - ND_{pct} = NP_{pc(t+1)} \quad \forall p, c, t$$

### iii. Mínimo Staff.

$$MP_{cp} \cdot \sum_{s \in S_c} x_{pcst} \leq NP_{pct} \quad \forall p, c, t$$

### iv. Número máximo de promociones.

$$\sum_{t=1}^{48} \sum_{p \in PIMP_c} \sum_{s \in S_c} x_{pcst} \leq Maxpro_c \quad \forall c$$

### v. Distintas promociones para los clientes.

$$\sum_{c=1}^2 x_{pcst} = 1 \quad \forall p \in PIMP_1 \cap PIMP_2, c, t$$

### vi. Implementación en todas las salas.

$$\sum_{s \in S_c} x_{pcst} = |S_c| \cdot x_{pcst} \quad \forall p, c, s, t$$

### vii. Presupuesto.

$$\sum_{p \in PIMP_c} \sum_{s \in S_c} \sum_{t=4(m-1)+1}^{4m} x_{pcst} \cdot C_{pcst} \leq Ppto_{cm} \quad \forall c, m = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$$

o

$$\sum_{p \in PIMP_c} \sum_{s \in S_c} \sum_{t=4(m-1)+1}^{4m} x_{pcst} \cdot C_{pcst} + \sum_{p \in PIMP_c} \sum_{s \in S_c} \sum_{t=4(m-1)+1}^{4m} (NC_{pct} \cdot CC_{pct} + ND_{pct} \cdot CD_{pct}) \leq Ppto_{cm}$$

$$\forall c, m = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$$

### viii. Equilibrio Promocional.

$$\sum_{c=1}^2 \sum_{s \in S_c} \sum_{t=1}^{48} x_{pcst} - \sum_{c=1}^2 \sum_{s \in S_c} \sum_{t=1}^{48} x_{p'cst} \leq 5 \quad \forall p, p'$$

### **Función Objetivo**

$$\text{Max} \quad \sum_{c=1}^2 \sum_{p \in PIMP_c} \sum_{s \in S_c} \sum_{t=1}^{48} (B_{psct} - C_{psct}) \cdot x_{psct} - \sum_{c=1}^2 \sum_{p \in PIMP_c} \sum_{t=4(m-1)+1}^{4m} (NC_{pct} \cdot CC_{pct} + ND_{pct} \cdot CD_{pct})$$